ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ (Β' εξάμηνο)

ΟΡΙΣΜΟΣ 19.9b

Μια απεικόνιση $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λέγεται τετραγωνική μορφή αν η απεικόνιση $\tilde{q}: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}\right) = q((x_1, \dots, x_n))$ είναι τετραγωνική μορφή. Ορίζουμε πίνακα(q) = πίνακα$(\tilde{q})$

$\tilde{q}(X) = \mathrm{tr}(X^t A X)$ π.χ. $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ Είναι σαν απεικόνιση τετραγωνική μορφή $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή

(ΟΡΙΣΜΟΣ 18.1: $\tilde{q}: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή αν $\exists\, a_{ij} \in \mathbb{R}$ $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 19.9c Έστω $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή A = πίνακας(q)

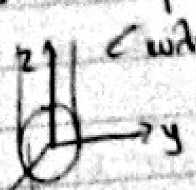
Μελετάμε $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : q(x_1, \dots, x_n) = 1\}$. Με αναγωγή της q στους κύριους άξονες (αυτό σημαίνει έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμές του A, έστω P ορθογώνιος με $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ Θέτουμε $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ η εξίσωση της S γίνεται

$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 = 1$ (ομοίως η $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ γίνεται $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 = 0$

Επομένως για $f = 0$ ή 1 το γεωμ. σχήμα $S = \{(x_1, \dots, x_n) : q(x_1, \dots, x_n) = 1\}$ εξαρτάται μόνο από το ζεύγος μη αρνητικών ακεραίων $(\mathrm{rank}(q), i(q))$

υπενθ. $\mathrm{rank}(q)$ = ο αριθμός των μη μηδεν. λ_i

$i(q)$ = ο αριθμός των θετικών ιδιοτιμών του A = ο αριθμός των θετικών λ_i

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση $\mathrm{rank}(q) = n$ (ισοδύναμα $\lambda_i \neq 0$ για κάθε i) γιατί αλλιώς το S προκύπτει σαν "κύλινδρος" από σχήμα μικρότερης διάστασης π.χ.  ← κύλινδρος $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ με $q(x_1, x_2) = 1\}$. Τότε S έλλειψη (κύκλος) $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(q) = 2$ και $i(q) = 2\}$. S υπερβολή $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(q) = 2$ και $i(q) = 1$

ΠΙΟ ΓΕΝΙΚΑ. Έστω q τετραγωνική μορφή στις $f \in \mathbb{R}$ και $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$
$q(x_1, \dots, x_n) + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = f\}$

ΒΗΜΑ 1ο Αναγωγή της q στους κύριους άξονες ~~[illegible]~~ (δηλ. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ (το P όπως προηγούμενα) Η εξίσωση γίνεται $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + a_1' z_1 + \dots + a_n' z_n = f$

ΒΗΜΑ 2ο (Υποθέτοντας $\mathrm{rank}(q) = n$ δηλ. $\lambda_i \neq 0$ για κάθε i)

Με συμπλήρωση τετραγώνων παίρνουμε
$\lambda_1(z_1-c_1)^2+\lambda_2(z_2-c_2)^2+\dots+\lambda_n(z_n-c_n)^2=\rho'$
Με αλλαγή μεταβλητών $z_i=z_i'+c_i$ για $i=1,2,\dots,n$ παίρνουμε $\lambda_1(z_1')^2+\dots+\lambda_n(z_n')^2=\rho'$ που είδαμε προηγουμένως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 199 (Έκφραση [illegible] τετραγωνικών επιφανειών στο $\mathbb{R}^3$

Για $S=\{\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2=\rho$

$\begin{cases} r(q)=3 \\ i(q)=3 \end{cases}$

ΟΡΙΣΜΟΣ ελλειψοειδές $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ (επιφάνεια σφαίρας όταν $a^2=b^2=c^2$

μονόχωνο υπερβολοειδές $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$

δίχωνο υπερβολοειδές $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$ $\begin{cases} r(q)=3 \\ i(q)=1 \end{cases}$

ελλειπτικός κώνος $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$ $\begin{cases} r(q)=3 \\ i(q)=2 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$ A συμμετρικός $(A=A^t)$

Ο A είναι διαγωνίσιμος στο $\mathbb{C}$; $\chi_A(x)=\det(A-xI_2)=$
$\begin{vmatrix} 1-x & i \\ i & -1-x \end{vmatrix}=(1-x)(-1-x)+1=x^2$ Έστω $m_A(x)$ ελάχ. πολ. του A. Από θεωρία $m_A(x)=x$ ή $m_A(x)=x^2$. Το 1ο δεν ισχύει γιατί $m_A(x)=x$ και $0\Rightarrow m_A(A)=0\Rightarrow A=\mathbb{O}_{2\times2}$.
Άρα $m_A(x)=x^2\Rightarrow A$ όχι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΕΡΜΙΤΙΑΝΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 200 α

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{C}$. Μια απεικόνιση λέγεται ερμιτιανό
$\langle , \rangle: V\times V\to\mathbb{C}$ αν
(i) $\langle v+w,z\rangle=\langle v,z\rangle+\langle w,z\rangle$ $\forall w,v,z\in V$
(ii) $\langle\lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$ για $v,w\in V$ $\lambda\in\mathbb{C}$
(iii) $\langle z,v\rangle=\overline{(\langle v,z\rangle)}$ για κάθε $v,z\in V$
(iv) (Από (iii) για [illegible]
(v) $\langle v,v\rangle=0$ για [illegible]

Για $v \in V$ ορίζουμε $\|v\| = \sqrt{<v,v>}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 200 b

Το κανονικό ή συνηθές μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$ είναι
$<(z_1, \dots, z_n), (w_1, w_2, \dots, w_n)> = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \dots + z_n\bar{w}_n \in \mathbb{C}$

Αποδ για (iii) $<(w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n)> = w_1\bar{z}_1 + w_2\bar{z}_2 + \dots + w_n\bar{z}_n$
Ενώ $<(z_1, \dots, z_n)(w_1, \dots, w_n)> = \overline{(z_1\bar{w}_1) + z_2\bar{w}_2 + \dots + z_n\bar{w}_n}$ (1)
Άρα (1) $\Rightarrow <(w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n)> = \overline{<(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n)>}$
Αποδ για (iv) Έστω $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$. Τότε $<(z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n)>$
$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n$ (Αλλά για $a \in \mathbb{C}$ $a\bar{a} \in \mathbb{R}$ και $a\bar{a} \geq 0$ και
$a\bar{a} = 0 \Rightarrow a = 0$
Σαν συνέπεια $<(z_1, \dots, z_n)(z_1, \dots, z_n)> \geq 0$ και
$<(z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n)> = 0 \Rightarrow (z_1, \dots, z_n) = (0, 0, \dots, 0)$